УДК 517.962

АПОСТЕРИОРНЫЕ ИНДИКАТОРЫ ОШИБОК СХЕМ МКЭ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ВЫРОЖДЕНИЕМ [1)]

М.Р. ТИМЕРБАЕВ

Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: mtimerba@kpfu.ru

A POSTERIORI ERROR INDICATORS IN THE FINITE ELEMENT METHOD FOR ELLIPTIC BVP WITH DEGENERATION

M.R. TIMERBAEV

Kazan Federal University

Аннотация

Рассматривается класс эллиптических краевых задач с вырождающимися коэффициентами, для которых на основе мультипликативного выделения особенности строятся схемы МКЭ с оптимальной сходимостью. Для шкалы весовых норм Соболева, включающую энергетическую норму дифференциального оператора, устанавливаются апостериорные оценки погрешности дискретных решений.

Ключевые слова: Эллиптическая краевая задача с вырождением, метод конечных элементов, апостериорные оценки ошибок

Summary

We consider a class of elliptic boundary value problems with degenerating coefficients for which we construct schemes of the finite-element method with the optimal convergence on the basis of a multiplicative extraction of the singularity. For a scale of weighted Sobolev norms including an energy norm of the differential operator, we prove a posteriori estimates for the error of the discrete solutions.

Key words: Elliptic boundary value problem with degeneration, finite element method, a posteriori error estimates.

Введение

Многие краевые задачи эллиптического типа формулируются в вариационном виде:

$$\text{найти } u \in U: \quad \mathfrak{a}(u,v) = < f, v > \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

Здесь (U,V) дуальная относительно билинейной формы $\mathfrak{a}$ пара гильбертовых или банаховых пространств функций (может быть и обобщенных функций, распределений), $f \in V'$ (V' — сопряженное к V пространство), скобки $< \cdot,\cdot >$ обозначают отношение двойственности между V' и V. Проекционно-сеточные методы для приближенного решения задачи (1) включают в себя процедуру построения конечномерных подпространств $U_h \subset U$, $V_h \subset V$, как правило, кусочно-полиномиальных функций, ассоциированных с *триангуляцией* $\mathcal{T}_h$ расчетной области задачи на *конечные элементы* с характерным размером (диаметром) h. Аппроксимация по методу Галеркина (или Петрова-Галеркина) в h-версии заключается в решении семейства задач для серии малых h:

$$\text{найти } u_h \in U_h: \quad \mathfrak{a}(u_h,v) = < f, v > \quad \forall v \in V_h. \tag{2}$$

[1)] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00908, 12-01-97026)

Вопросы анализа ошибки $u - u_h$ в тех или иных подходящих нормах являются первостепенными в теории и практике проекционно-сеточных схем. Широкое распространение получили апостериорные оценки ошибок и основанные на них различные адаптивные методы и стратегии уточнения дискретных решений. Этой проблематике посвящено большое число статей и монографий, см.напр. [1]- [3]. В данной статье мы рассматриваем эти вопросы применительно к краевым эллиптическим задачам с вырождающимися коэффициентами. В работе показано, что стандартные кусочно-полиномиальные аппроксимации для рассматриваемых задач оказываются неэффективными. Наш подход заключается в мультипликативном выделении особенности, на основе которого строятся схемы МКЭ с оптимальной сходимостью. Мы выделяем шкалу двойственных друг другу весовых норм Соболева, включающую энергетическую норму дифференциального оператора, и устанавливаем в этих нормах апостериорные оценки погрешности дискретных решений.

1. Постановка задачи и аппроксимация конечными элементами

В прямоугольной области $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается модельная краевая задача

$$Au \equiv -\nabla \cdot (\rho^{2\alpha} a \nabla u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (\alpha < 1/2). \tag{3}$$

Здесь для точки $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ $\rho(x) = x_1 = \mathrm{dist}(\Gamma, x)$ есть расстояние от x до части границы $\Gamma = \{0\} \times [0,1]$, $a(x) = \mathrm{diag}(a_1(x), a_2(x))$ — диагональная матрица положительных в $\overline{\Omega}$ коэффициентов класса $C^1(\overline{\Omega})$. Наличие множителя $\rho^{2\alpha}$ при $\alpha \neq 0$ приводит к сингулярности коэффициентов дифференциального оператора A в окрестности Γ. Ограничение степени вырождения $\alpha < 1/2$ связано лишь с корректностью краевых условий Дирихле на линии вырождения Γ. Эта задача приводится к задаче (1) с билинейной формой

$$\mathfrak{a}(u, v) = \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha} a \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

на энергетическом пространстве H, порождаемом этой билинейной формой.

Мы рассматриваем вопрос построения конечномерных подпространств $V_h \subset H$ для вычисления приближений $u_h \in V_h$ по методу Галеркина,

$$\mathfrak{a}(u_h, v) = < f, v > \quad \forall v \in V_h, \tag{4}$$

обладающих хорошими аппроксимационными свойствами. Доказывается, что стандартные кусочно-полиномиальные пространства конечных элементов не являются удовлетворительным решением этого вопроса. Основанный на факторизации решения $u = \sigma \hat{u}$, оптимальным будет выбор $V_h = \sigma \hat{V}_h$, где $\hat{V}_h$ — кусочно-полиномиальные пространства конечных элементов.

2. Апостериорные оценки в схемах МКЭ с мультипликативным выделением особенности

Обозначим через $\dot{X}_h$ подпространство кусочно-линейных функций из X_h, которые равны нулю на $\Gamma_0 = \overline{\partial\Omega \setminus \Gamma}$. В качестве аппроксимирующего пространства V_h в (4) возьмем $V_h = \sigma \dot{X}_h = \{\rho^{1-2\alpha} w : w \in \dot{X}_h\} \subset H$.

Теорема 1. *Для решения $u_h \in V_h = \sigma \dot{X}_h$ задачи (4) и для всех $\delta \in (\alpha - 1/2, 1/2 - \alpha)$ имеет место оценка в энергетической норме*

$$\|u - u_h\|^2 \leqslant c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2(u_h) \tag{5}$$

с индикатором ошибки элементе

$$\eta_K^2(u_h) = \frac{h_K^2}{\rho_K^2} \int\limits_K \rho^{2(1-\alpha)} |f + \nabla \cdot (\rho^{2\alpha} a \nabla u_h)|^2 \, dx + \frac{h_K}{2} \sum_{S \subset \partial K} \int\limits_S \rho^{2\alpha} |J_S(a \nabla u_h \cdot \mathbf{n}_S)|^2 \, dx, \tag{6}$$

где $\mathbf{n}_S$ — нормаль к стороне S, $J_S(a \nabla u_h \cdot \mathbf{n}_S)$ — скачок функции $a \nabla u_h \cdot \mathbf{n}_S$ на общей стороне S двух соседних конечных элементов.

Предложенный индикатор ошибки (6) используется в построении различных стратегий адаптивного сгущения сетки для уточнения конечноэлементных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **S.F. McCormick** Multilevel Adaptive Methods for Partial Differential Equations. Frontiers in Applied Mathematics. – SIAM, Philadelphia, 1989. – 173 p.
2. **R. Verfurth** A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques. – Wiley-Teubner, 1996. – 144 p.
3. **M. Ainsworth, J.T. Oden** A Posterori Error Estimation in Finite Element Analysis. Pure and Applied Mathematics. – John Wiley and Sons, 2000. – 264 p.

REFERENCES

1. **S.F. McCormick** Multilevel Adaptive Methods for Partial Differential Equations. Frontiers in Applied Mathematics. – SIAM, Philadelphia, 1989. – 173 p.
2. **R. Verfurth** A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques. – Wiley-Teubner, 1996. – 144 p.
3. **M. Ainsworth, J.T. Oden** A Posterori Error Estimation in Finite Element Analysis. Pure and Applied Mathematics. – John Wiley and Sons, 2000. – 264 p.